

Jeder Großstädter hat ihn täglich vor Augen: seinen U-Bahn-Plan. Ihn zu zeichnen ist eine Heidenarbeit. Nicht immer führt das zu optimalen Ergebnissen. Dabei gibt es durchaus eine Lösung für dieses vertrackte Problem.

## Die Schönheit des Untergrundes

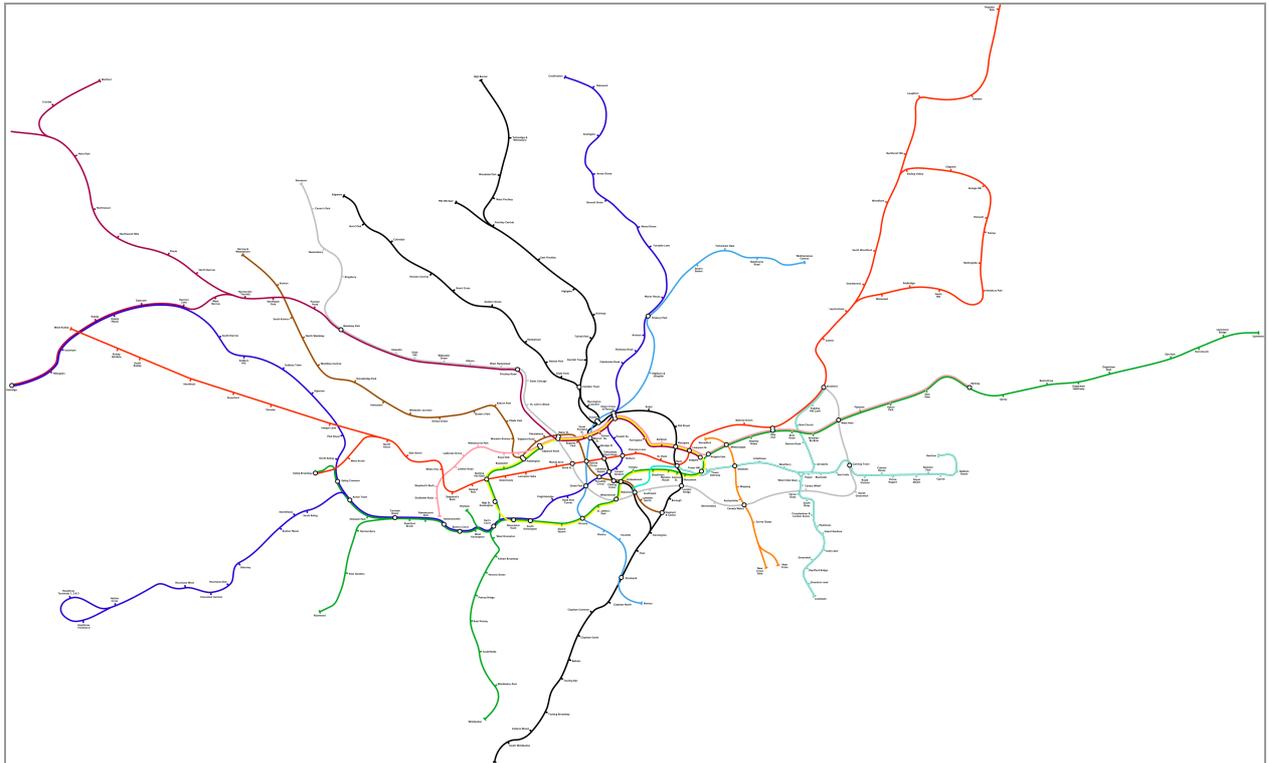
Von Klemens Polatschek

Alexander Wolff ist Informatiker und muß ein glücklicher Mensch sein. Denn seit ein paar Monaten sieht er ein Problem gelöst, das er zu seinem Lebensthema gemacht hat – jedenfalls soweit, wie ein Wissenschaftler in einer Lösung etwas anderes erkennen kann als die Einladung, neue Stufen des Ungelösten auszuspähen. Schon Wolffs Diplomarbeit an der Freien Universität Berlin hatte ihn 1995 mit der optimalen Beschriftung von Lageplänen aller Art zusammengebracht; promoviert hat er darüber auch. Im Juni 2001 animierte er dann seine Studenten an der Universität Greifswald in einem Seminar: „Ich füllte die Themenliste mit Problemen, die ich selbst schon immer gern gelöst hätte, aber entweder keinen Erfolg damit hatte oder keine Zeit dafür. Das Thema von Graphendarstellung und Graphenbeschriftung, hier unter dem Begriff U-Bahn-Diagramme formuliert, hat von allen in der Praxis sicherlich die größte Wichtigkeit.“

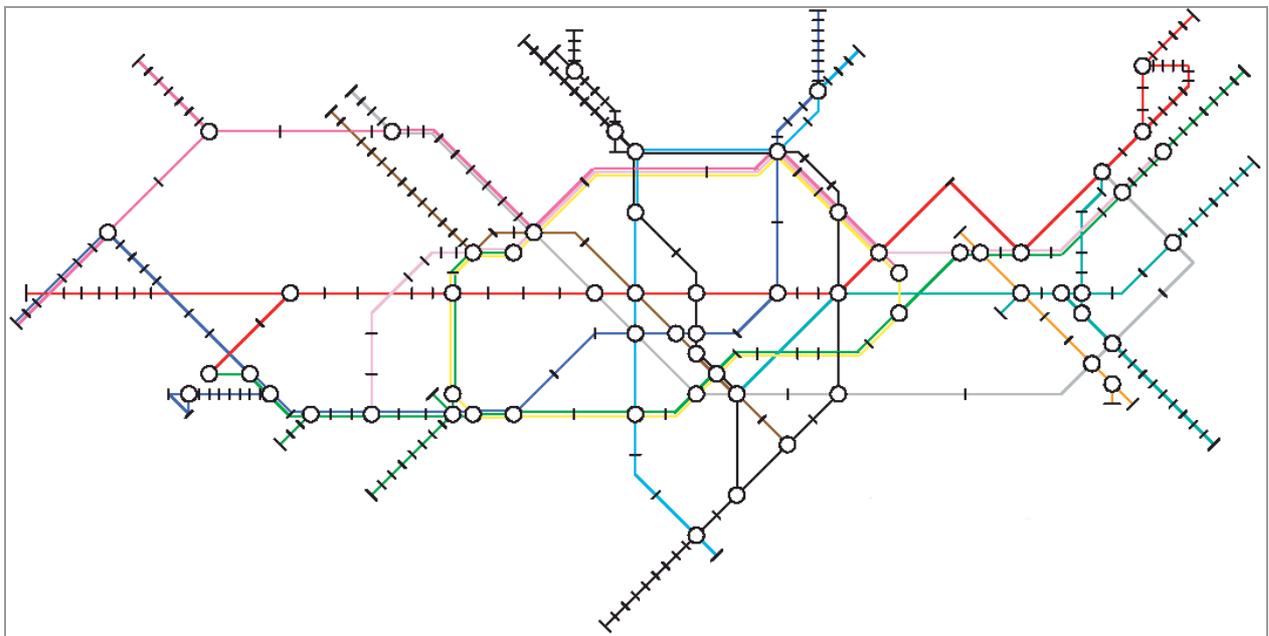
Computererzeugte U-Bahn-Pläne also. Nach seinem Wechsel an die Universität Karlsruhe verschloß Wolff an dieser Frage einen ausgewachsenen Doktoranden und ein paar eigene Bleistifte, bis er in dem jungen Martin Nöllenburg einen kongenialen Partner fand, der die Frage nicht nur willig schulterte, sondern im Rahmen einer Diplomarbeit auch zu einem fulminanten Ergebnis brachte, wie Wolff lobend erzählt: „Die Arbeit hätte schon so eine Eins gekriegt, aber daß er darin auch noch den mathematischen Beweis schaffte, wie schwierig die Lösung eigentlich ist, das verdiente eine Eins mit Sternchen.“

Doch worin besteht diese Schwierigkeit überhaupt? Wir alle sind mit schematischen Netzplänen von U-Bahnen – oder des öffentlichen Nahverkehrs generell – derart vertraut, daß uns das Spezielle daran kaum mehr auffällt. Es ist sogar so: Je besser sie sind, desto weniger wird einem die Qualität bewußt. Denn so ein Diagramm soll eben die mühelose Navigation innerhalb eines Nahverkehrssystems ermöglichen, es also möglichst einfach machen, die passende Station zum eigenen Ziel zu finden, die bunten Linien schnell nachzuverfolgen und alle Umsteigestellen zu sehen, die einen dorthin führen.

Es handelt sich hierbei sicherlich um kein weltumstürzendes Problem. Aber eines zum Verlieben. Und es ist ein Problem für Handgreiflichkeiten, denn für den geschulten Informationsdesigner ist die Detailausführung ausgedehnter Netzschemata ein Debattengegenstand ersten Ranges.



**Das größte Netz:** *So etwa würde der Londoner U-Bahn-Plan heute aussehen, wenn man ihn nach der ursprünglichen Abbildungsmethode fortgeschrieben hätte. Das Bild zeigt den geographisch korrekten Lauf der Linien. Das Londoner U-Bahn-Netz gilt mit 421 Kilometer Länge üblicherweise als das größte der Welt.*



**Schöngerechnet:** *Die geographischen Daten des Londoner Netzes speisten Karlsruher Forscher in ihre experimentelle Software zur automatischen Erzeugung von U-Bahn-Plänen ein. An dem gezeigten Beispiel rechnete das Optimierungsprogramm 15 Minuten lang. Es kann auch Stationen beschriften, aber da konnte es für das riesige Londoner Netz auch nach zwei Tagen Berechnung noch kein gutes Ergebnis vorweisen.*

In der Tat werden die großen Pläne bis heute von Hand gezeichnet – natürlich inzwischen am Computer, aber eben gesteuert vom Mausklick des Grafikers. Daß eine Software da systematisch mitzeichnen könnte, ist erst seit kurzem ein Thema. Meist nehmen sich theoretische Informatiker wie Wolff und Nöllenburg der Fragestellung an. Theoretische Informatiker sind häufig nicht so theoretisch, wie es klingt. Das Baby liegt nur meist vor ihrer Tür, weil Pläne aller Art sich eben als Bilder von etwas betrachten lassen, was der Mathematiker „Graphen“ nennt. Das sind Punkte, die durch Linien, oder genauer gesagt „Knoten“, die durch „Kanten“ verbunden sind. Für solche Graphen gibt es eine Graphentheorie, also eine Menge an mathematischen Formeln und Algorithmen, ohne deren Kenntnis man bei konkreten Problemen dieser Sorte kaum weiterkommt. Tatsächlich wird aus der Erzeugung eines scheinbar simplen U-Bahn-Schemas ein fetter Klumpen an Optimierungsaufgabe, an der auch ein schneller Computer schier endlos kauen kann.

Der Ausgangspunkt eines jeden U-Bahn-Plans sind ja immer die echten Schienen, auf denen Züge fahren, also die geographische Realität. Wie aus Geographie ein Schema wird, und zwar ein möglichst übersichtliches, das ist die Frage, um die es hier geht. Und jeder, der sich ernsthaft mit ihr befaßt, lernt als erstes die große historische Wende kennen, nämlich die freuden- und tränenreiche Geschichte des technischen Zeichners Henry C. Beck, dessen revolutionärer Londoner U-Bahn-Plan von 1933 ein System etablierte, das sich die Welt so heftig zu eigen machte, daß wir Heutigen darin gar nichts Besonderes mehr erkennen (siehe „Der Mann, der die Nudeln geradezog“).

Neben Alexander Wolff und Martin Nöllenburg haben sich seit ein paar Jahren noch einige Graphenforscher den U-Bahn-Plänen zugewandt. Wie in jeder Subdisziplin der Wissenschaft kennt man sich über die Kontinente hinweg, von Konferenzen und aus der Fachliteratur. Und alle kennen den Beckschen Urgrund. Wenn man aber in einem internationalen Vergleichstest die Ergebnisse nebeneinander hält, dann scheint es, als hätten nur Wolff und Nöllenburg am Ende die Nerven gehabt, bis ganz nach unten zu stochern, wo die ästhetische und praktische Essenz der Sache liegt – der U-Bahn-Plan als Prinzip.

Vielleicht beantwortet gerade ein so scheinbar entlegenes Feld am besten die Frage, über die auch im deutschen Informatikjahr 2006 das öffentliche Kopfkrazen anhält, nämlich wie Informatiker eigentlich ticken und wozu genau sie nütze sind. Denn die Karlsruher Arbeit zeigt, auf wie wenigen Regeln unser ästhetischer und wahrnehmungspsychologisch-ergonomischer Kladderadatsch manchmal beruht. Und sie beweist, daß er technisch nachzubauen ist. Schönheit wird zur Rechengröße! Interessant ist natürlich auch, wo dieser Weg seine Grenzen findet. Ein funktionierendes System nach Karlsruher Art wird die Grafikdesigner nicht arbeitslos machen. Das war nicht das Ziel, und die entstandene Software taugt heute allenfalls für gute Vorlagen, nicht für die Feinausführung. Doch denke man an die vielen schicken Pläne, die in Zukunft ad hoc nach Nutzervorgaben,

im Detail, als Ausschnitt, live und online, fürs Handy und fürs Web zu berechnen wären.

Als Wolff und Nöllenburg ihren historischen Henry Beck zu Ende studiert und lange über einem Stapel moderner U-Bahn-Pläne gegrübelt hatten, erdachten sie sieben schlichte Regeln, die aus einem geographischen Plan ein Netzschema machen. „Das Problem so zu modellieren war eigentlich die Hauptarbeit“, berichten sie. Von den sieben waren es zunächst vier harte Regeln, denen die neue „schöne Zeichnung“, wie sie das nennen, ohne Ausnahme folgen muß: Sie muß der geographischen Vorlage topologisch gleichen, das heißt, jeder Knoten muß rundum wieder mit den gleichen Knoten durch je eine Kante verbunden sein. Jede Kante muß außerdem mit einer gewissen festlegbaren Mindestlänge abgebildet werden. Jeder Knoten muß darüber hinaus einen festlegbaren Mindestabstand von vorbeiführenden Kanten halten. Und schließlich muß die neue Zeichnung „oktilinear“ werden: Jede Kante muß von jedem Knoten weg ausnahmslos in eine von acht Richtungen weisen – horizontal, vertikal oder diagonal entweder 45 Grad nach links oder nach rechts geneigt; das war seinerzeit der große Kniff des Henry Beck.

Die drei weiteren Regeln sind eher weich. Das heißt: Je besser eine neue Zeichnung sie erfüllt, einen desto höheren Schönheitswert bekommt sie in der darauf berechneten Optimierung zuerkannt. Erstens soll jede U-Bahn-Linie darin möglichst wenige Knicke aufweisen, also jede ihrer Kanten möglichst in dieselbe Richtung weisen wie ihre Nachbarn auch. Zweitens sollte die Summe sämtlicher Kantenlängen in der Zeichnung möglichst klein sein (je kompakter das Ganze, desto hübscher). Drittens sollte jede Kante möglichst nahe der Richtung liegen, die sie in der ursprünglichen geographischen Abbildung hat.

Die Bilder, die der Computer nach diesen sieben Regeln am Ende auswirft, ähneln en gros wie en detail oft verblüffend den menschengemachten. Man versteht auf einmal, wovon die zahllosen Skizzenzettel handelten, mit denen Henry Beck über Jahrzehnte hinweg sein Heim pflasterte. Das waren ebenfalls Optimierungsläufe, gekritzelte verbesserte Lösungen. Denn wenn Regeln einmal auf die beschriebene Weise formuliert sind, kann man sie fast ohne Umstände einem der verfügbaren Standardprogramme für eine sogenannte gemischt-ganzzahlige Optimierung vorwerfen. Dieses Programm wirft dann einen optimal schönen Plan aus.

Man muß nur manchmal Geduld haben. Mathematisch gehört die U-Bahn-Aufgabe nämlich zu einer ebenso häufigen wie unbeliebten Klasse von Rechenproblemen, die man „NP-vollständig“ nennt. Das ist der Beweis, den Martin Nöllenburg führte. Nach heutiger Erkenntnis gibt es bei Problemen dieser Klasse keinen Trick für schnelle Lösungen. Es hilft nur schiere Rechenkraft, weshalb umfangreiche Aufgaben sich in der Praxis einer präzisen oder garantierten Lösung verweigern.

Damit taucht plötzlich ein mathematischer Grund dafür auf, warum Henry Beck in London viele Jahre mit dem Versuch zubrachte, möglichst wenige U-Bahn-Linien als Diagonalen abzubilden. Bekannt

war, daß er als ausgebildeter technischer Zeichner sich elektrische Schaltpläne als Vorbild genommen hatte, die ja nur vier Richtungen, sprich horizontale und vertikale Linien kennen – also „Rektilinearität“ statt „Oktilinearität“. 1987 konnte der amerikanische Doktorand Roberto Tamassia, heute Professor für Informatik an der Brown University, zeigen, daß eine rein rektilineare Zeichnung „effizient lösbar“ ist, also leichter zu berechnen und eben nicht NP-schwer. Seit Nöllenburg weiß man weiterhin: Will man auch Diagonalen sehen, wird das Problem schwer. Henry Beck damals mag das beim Tüfteln gespürt haben. Die beiden Karlsruher Forscher sind offenbar die einzigen, die sich dieser Komplexität stellen. Die Verfahren der anderen Gruppen kommen zwar auch mal schneller zu einem Ergebnis, ihren Ansätzen ist jedoch gerade die entscheidende Oktilinearität gleichgültig oder weniger wichtig – ästhetischer Wert entsteht so höchstens zufällig. (Siehe „Der Grand Prix von Sydney“.)

Die Karlsruher Software läßt uns glücklicherweise auch nicht tagelang auf eine Optimierung warten. Bereits während des Laufs lassen sich neue Kriterien einrechnen. Das nutzen Wolff und Nöllenburg für den Trick, ihr Modell nicht mit einer generellen Überprüfung der Frage zu belasten, ob sich irgendwelche Linien in der Zeichnung überschneiden. Interessante Kandidaten für eine schöne Zeichnung werden auf schneidende Linien geprüft, und eine solche unerlaubte Überlappung wird durch Setzen eines einzelnen zusätzlichen Kriteriums ausgeschlossen. Der Nutzer kann die Kandidaten jederzeit betrachten und wird in den meisten Fällen mit den ersten guten Lösungen zufrieden sein, auch wenn die noch gar nicht rechnerisch optimal sind. Für das vergleichsweise wenig verknotete Wiener U-Bahn-Netz etwa lieferte die Karlsruher Software auf einem haushaltsüblichen PC schon nach 21 Sekunden eine erstklassige Lösung.

Die Software kann die U-Bahn-Stationen auf den Plänen auch beschriften. Das ist eigentlich ein eigener Zweig der Forschung und keine geringe Kunst. Mathematisch gesehen erhöht die Vorgabe, möglichst große (aber einheitlich große) Texte ohne Überschneidungen in ein Diagramm zu plazieren, die Komplexität der Aufgabe dramatisch. Doch lösen die Karlsruher die Anforderung durch einen eleganten Kniff. Beschriftungen werden durch eine Art Pseudo-U-Bahn umhüllt, die dann in der Gesamtoptimierung mitläuft. Weil dabei so viel mehr Eingabekriterien vorliegen, dauert die Suche nach einer schönen Zeichnung länger. Im Fall Wien berichtet Nöllenburg von 43,2 Stunden und ergänzt: „Die ersten vergleichbar guten Lösungen tauchten aber schon nach 24 Stunden auf, und machbare Lösungen schlechterer Qualität gab es nach nur dreieinhalb Minuten.“

Für die verzwickten Netze von Sydney und London fand sich mit zweitägigen Rechenläufen noch gar kein schön beschrifteter Plan. Hier bedarf die Optimierung also noch der Optimierung – oder einer massiv verstärkten Rechenkapazität. Auch im Detail müßte die Verschönerung jetzt erst anfangen: Umsteigepunkte anders zu markieren, den Linien eine beliebige Breite geben zu können. Wann darf man damit rechnen? „Wir werden das Thema wohl nicht weiterverfolgen“, sagt Martin

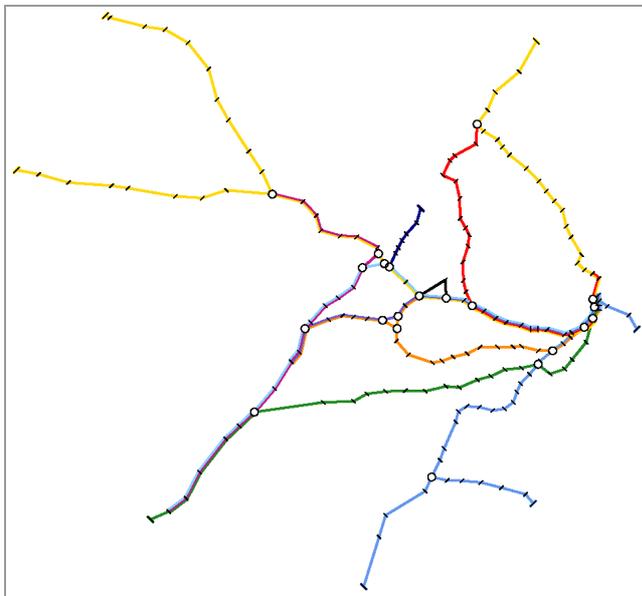
Nöllenburg. Alexander Wolff, der Anfang des Jahres in Karlsruhe habilitierte, zieht gerade weiter auf eine neue Stelle nach Eindhoven. „Den Programcode werden wir wohl freigeben, damit er nicht verschimmelt“, sagt er. Vielleicht gibt es ja irgendwo jemanden, der nicht weiter U-Bahn-Pläne von Hand zeichnen will.

**Quellen:** „Mr Beck's Underground Map“ von Ken Garland (1994), „Underground Maps After Beck“ von Maxwell J. Roberts (2005), „Metro Maps of the World“ von Mark Ovenden (2005), alle bei Capital Transport Publishing in London erschienen. **Websites:** [www.urban-rail.net](http://www.urban-rail.net) und [www.mic-ro.com/metro](http://www.mic-ro.com/metro)

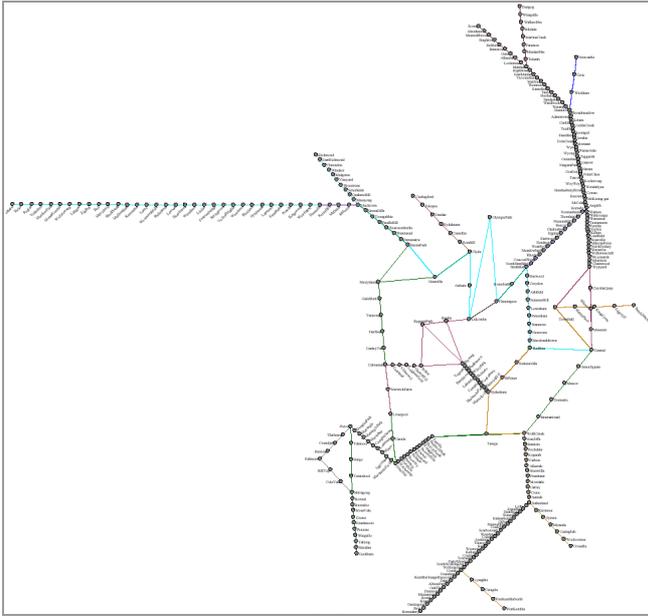
---

## Der Grand Prix von Sydney

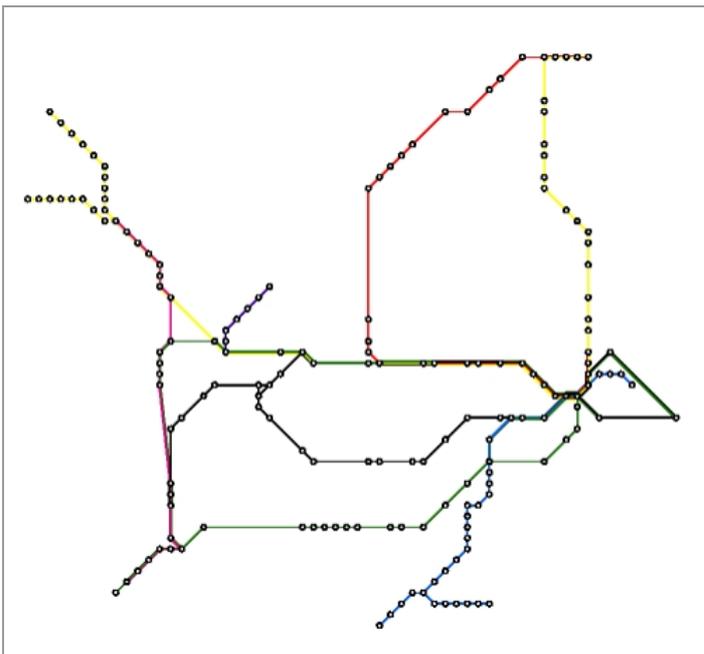
Am Beispiel der australischen Metropole läßt sich ein Vergleichstest der automatisch erzeugten U-Bahn-Pläne durchführen. Alle bekannten Forschergruppen, die Netzpläne optimieren, haben Sydney als eines ihrer Beispiele gerechnet – leider nicht alle im selben Jahr und manche in einer gekappten Version, so daß beispielsweise Farbe und Länge der Außenlinien voneinander abweichen. Trotzdem sind die benutzten Rechenprinzipien am einheitlichen Beispiel am besten zu illustrieren. Die Konkurrenten des Karlsruher Modells scheren sich mit ihren Verfahren weniger um die Oktilinearität, also um das feste Raster der acht Richtungen, und liefern daher Schema-Pläne, die uns ungewohnt erscheinen. Man könnte sie aber auch einfach häßlich nennen.



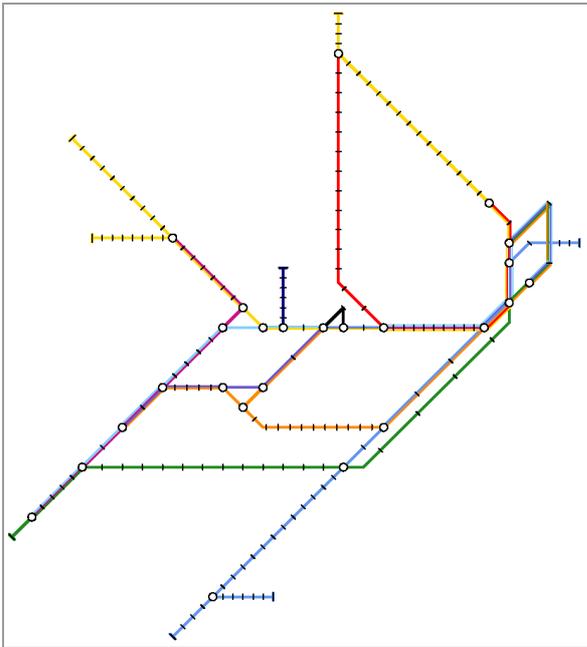
**Geografie:** *das kartographisch korrekte Bild der Linien von Sydney CityRail (Stand 2003). Wie das Unternehmen selber feststellt, gilt das Netz als „eines der verwickeltsten in der Welt“ und soll bis 2010 mit hohen Investitionen in neue Schienenverknüpfungen durchlässiger gemacht werden.*



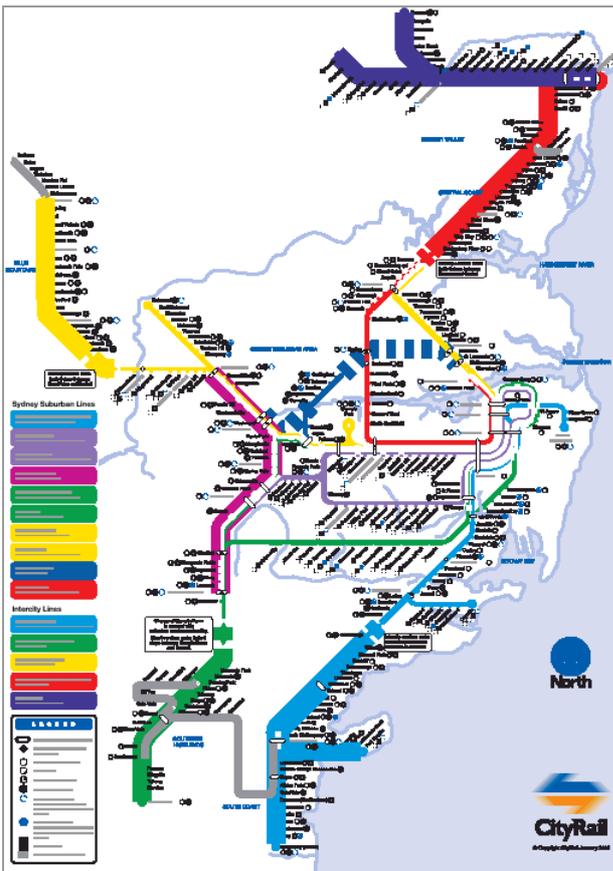
**Anziehungskräfte:** Eine internationale Gruppe um Seok-Hee Hong, Spezialistin für Graphen-Darstellung an der Universität Sydney, veröffentlichte 2004 fünf schematische Versionen des Netzes. Ihr bestes Verfahren ist ein „Spring Embedder“, Schritt für Schritt rücken dabei verbundene Knoten zusammen, nicht verbundene stoßen sich ab. Zeitbedarf: 7,6 Sekunden.



**Gipfelsucher:** Jonathan Stott und Peter Rodgers von der Universität Kent rechnen gern länger als Hong (hier 28 Minuten lang). Sie benutzen ein „Hill-climbing-Verfahren“ und optimieren schrittweise anhand mehrerer Schönheitskriterien.



**Optimierung über alles:** eine Karlsruher Version des Netzes von Sydney. Perfekt oktilinear, und wenigstens in diesem Fall mit nur 90 Sekunden Rechenzeit schneller fertig als das Modell aus Kent.



**Menschenwerk:** Die Grafiker von Sydney CityRail stecken natürlich viel mehr Feinarbeit in ihr Netzschema. Das generelle Layout des Plans ist von einer automatischen Variante aber nicht weit entfernt, sie könnte also durchaus Grundlage für weiteres manuelles Getüftel werden.